VIII.3.45. Пусть $T \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклое компактное центрально симметричное относительно нуля тело, $\mathcal{E}$ — эллипсоид максимального объёма, содержащийся в T:

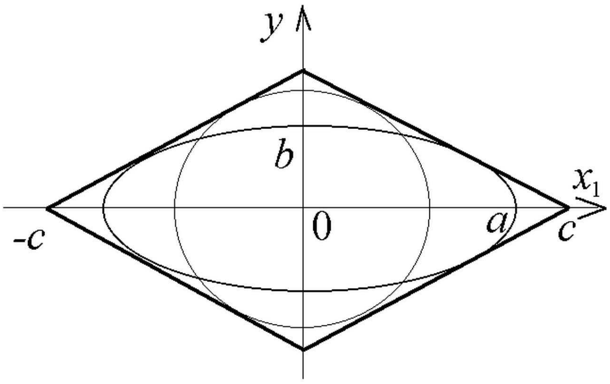
$$\mathcal{E} \subset T, \quad \lambda_m(\mathcal{E}) = \sup\{\lambda_m(E) \mid E \subset T,\ E \text{ — эллипсоид}\}.$$

Докажите, что $T \subset \sqrt{m}\,\mathcal{E}$.

Решение. Проверьте, что выпуклая оболочка двух эллипсоидов, получаемых один из другого сдвигом, содержит эллипсоид большего объёма. Выведите отсюда, что эллипсоид $\mathcal{E}$ центрально симметричен относительно нуля. Не умаляя общности, можно считать, что $\mathcal{E} = \overline{B^m}$. В таком случае

$$\lambda_m(E) \leqslant \alpha_m, \quad \text{если } E \subset T,\ E\text{— эллипсоид.} \tag{1}$$

Допустим, что $x_0 \in T$, $\|x_0\| > \sqrt{m}$. Очевидно, можно считать, что $x_0 = (c, 0, \ldots, 0)$, где $c = \|x_0\|$. Рассмотрим множество



T_1 — выпуклую оболочку шара $\overline{B^m}$ и точек $\pm x_0$ (двумерное сечение S множества T_1 плоскостью, проведённой через ось x_1, изображено на рис.). Очевидно, что $T_1 \subset T$. Возьмём точку a, лежащую на оси x_1, $0 < a < c$, и рассмотрим эллипс $\widetilde{E}$, определяемый неравенством $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$, где $b^2 = \frac{c^2 - a^2}{c^2 - 1}$, а ось y взята в плоскости сечения перпендикулярно оси x_1. Проверьте, что $\widetilde{E} \subset S$. Из этого включения следует, что T_1 содержит эллипсоид E_a, полученный вращением $\widetilde{E}$ вокруг оси x_1 в пространстве $\mathbb{R}^m$. Пусть

$V(a)=\lambda_m(E_a)$. Так как сечение E_a гиперплоскостью $x_1=\mathrm{const}$ есть шар, то

$$V(a)=\alpha_{m-1}\int\limits_{-a}^{a} b^{m-1}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{m-1}{2}} dx=\alpha_m\, a\,\left(\frac{c^2-a^2}{c^2-1}\right)^{\frac{m-1}{2}}.$$

Ясно, что $V(1)=\alpha_m$ и $V'(1)=\alpha_m\frac{c^2-m}{c^2-1}>0$. Поэтому при a, близком к единице, и $a>1$ будет справедливо неравенство $V(a)>\alpha_m$, хотя $E_a\subset T$, что противоречит неравенству (1).