Избранные вопросы математического анализа

(*для студентов 3-го курса*)

Курс будет состоять из нескольких независимых и никак не связанных между собой частей (по две лекции в каждой части). По каждой теме слушателям будут предлагаться задачи разной сложности, вплоть до задач для курсовой работы. Подробности и актуальную информацию можно узнать по адресу `http://www.math.spbu.ru/user/aih/students/sd.htm` или `http://aikhrabrov.narod.ru/students/sd.htm`.

Примерный план курса

Неравенство Хинчина

Неравенство Хинчина утверждает, что для n и любых a_1, a_2, …, a_n средние (по всем возможным расстановкам знаков) степенные величин $|\pm a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n|$ сравнимы со средним квадратичным.

Приведем также точную формулировку с использованием *функций Радемахера* $r_n(t) = \operatorname{sign}\sin(2^n\pi t)$:

Для любого $p > 0$ существуют такие положительные числа A_p и B_p, что при любом натуральном n и любых вещественных коэффициентах a_1, a_2, …, a_n справедливо неравенство

$$A_p\Big(\int_0^1\Big|\sum_{k=1}^n a_k r_k(t)\Big|^2\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\int_0^1\Big|\sum_{k=1}^n a_k r_k(t)\Big|^p\Big)^{1/p} \leqslant B_p\Big(\int_0^1\Big|\sum_{k=1}^n a_k r_k(t)\Big|^2\Big)^{1/2}.$$

Существенно, что A_p и B_p зависят только от p, но не от n.

Неравенство Бернштейна и другие неравенства для производных и разностей тригонометрических многочленов

Тригонометрическим многочленов порядка n называется функция

$$g(t) = a_0 + a_1\cos t + b_1\sin t + \ldots + a_n\cos nt + b_n\sin nt,$$

где коэффициенты — произвольные комплексные числа.

Неравенство Бернштейна утверждает, что если тригонометрический многочлен $g(t)$ степени n удовлетворяет при любом вещественном t неравенству $|g(t)| \leqslant 1$, то $|g'(t)| \leqslant n$.

На лекциях будет рассказано про это и другие неравенства для производных и разностей тригонометрических многочленов.

Максимальный оператор и преобразование Гильберта

Максимальным оператором называется нелинейный оператор, сопоставляющий каждой функции $x(t)$ функцию

$$(\mathcal{M}x)(s) = \sup_{[a,b]\ni s}\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Отметим, что при некоторых s значения $(\mathcal{M}x)(s)$ могут обращаться в даже, если исходная функция $x(t)$ была суммируемой. Однако для суммируемых функций мера таких s заведомо равна нулю. Для максимального оператора будут доказаны разнообразные оценки и неравенства, которые будут использованы для исследования *преобразования Гильберта*: линейного оператора, сопостовляющего каждой функции $x(t)$ функцию

$$(\mathcal{H}x)(s) = \frac{1}{\pi}\,\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x(t)}{s-t}\,ds.$$

Теорема Пика и задача интерполяции аналитических функций

Теорема Пика даёт ответ на следующий вопрос: когда интерполяционная задача $f(z_j) = w_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, разрешима в классе всех аналитических функций f, действующих из открытого единичного круга $\mathbb{D}$ в себя, где $z_j, w_j \in \mathbb{D}$ и $z_j \neq z_k$ при $j \neq k$.

Таже она даёт ответ на вопрос о единственности решения этой интерполяционной задачи. Несложно видеть, что множество всех решений выпукло. Отсюда следует, что если интерполяционная задача разрешима, то либо решение единственно, либо решений бесконечно много.

При $n = 1$ эта интерполяционная задача очевидно всегда разрешима и имеет бесконечно много решений.

При $n = 2$ она имеет решение в том и только в том случае, когда $\dfrac{|w_1 - w_2|}{|1 - \overline{w}_1 w_2|} \leqslant \dfrac{|z_1 - z_2|}{|1 - \overline{z}_1 z_2|}$, причём равенству соответствует случай единственности решения.

Ответ при $n > 2$ существенно сложнее.

Наряду с этими вопросами планируется рассмотреть несколько переформулировок теоремы Пика (соответствующие интерполяционные задачи в классах аналитических функций $f : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{D}$, $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}_+$ и $f : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$, где $\mathbb{C}_+$ обозначает верхнюю полуплоскость). Кроме того, предполагается рассмотреть и некоторые другие утверждения так или иначе, связанные с теоремой Пика.

Однолистные функции и проблема коэффициентов

Аналитическая функция называется *однолистной*, если в различных точках она принимает различные значения. Добавление к аналитичности функции требования ее однолистности накладывает на функцию ряд существенных ограничений. Если она определена в открытом единичном круге $\mathbb{D}$, то и сама функция и ее производная не могут слишком быстро расти и слишком быстро убывать, ее коэффициенты Тейлора также не могут слишком быстро расти и т. д. Важно, что в целом ряде случаев можно найти точные ответы. Например, *теорема Кёбе об* $1/4$ утверждает, что, если $f(z)$ — однолистная в $\mathbb{D}$ функция, $f(0) = 0$ и $f'(0) = 1$, то $\frac{1}{4}\mathbb{D} \subset f(\mathbb{D})$.

Специфические свойства однолистных функций оказываются значимыми для всего комплексного анализа.

Теорема Римана о конформном отображении

Теорема Римана о конформном отображении утверждает, что для любой односвязной области, граница которой состоит более чем из одной точки, существует аналитическая в этой области функция $f(z)$, конформно отображающая ее на открытый единичный круг.

На лекциях будет рассказано доказательство теоремы Римана, а также обсуждены разные другие вопросы, возникающие в связи с конформными отображениями.

Самоподобные мозаики как "фракталы наизнанку"

Будет рассказано о некоторых конструкциях компактных фрактальных множеств в евклидовом пространстве, которые характеризуются тем свойством, что некоторые их части повторяют, в уменьшенном размере, все множество (самоподобие "внутрь"), и мозаик, то есть периодических или почти-периодических замощений пространства одинаковыми фигурами. Мозаики тесно связаны с кристаллами и квазикристаллами. Некоторые мозаики обладают самоподобием "наружу", что делает их в определенном смысле похожими на фракталы.

Для описания этих геометрических структур оказываются полезными некоторые алгебраические понятия: p-адические числа, числа Пизо–Виджаярагхавана. Также имеется тесная связь этих понятий с гармоническим анализом.