

УПРАЖНЕНИЯ ПО ТЕМЕ "ФРАКТАЛЫ И МОЗАИКИ"

А. А. Лодкин

1. Доказать, что фрактал, получаемый из отрезка выкидыванием чисел, в 5-ричной записи которых отсутствуют цифры 1 и 3, гомеоморфен классическому канторову множеству C .

2. Доказать, что вполне несвязное подмножество интервала нигде не плотно в нем.

3. Доказать, что вполне несвязное компактное множество на прямой гомеоморфно C .

4. Доказать, что пространство целых p -адических чисел \mathbb{Z}_p (p — простое число) вполне несвязно.

5. Установить гомеоморфизм между \mathbb{Z}_2 и C .

6. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество, $N(\varepsilon)$ — минимальное число ε -шаров, покрывающих A , $\dim_M(A) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}$ — размерность Минковского множества A . Найти $\dim_M(A)$, если

а) A — гладкая кривая или поверхность;

б) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

в) $A = \{\frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

г) $A = C$;

д) A — самоподобное множество ($H(A) = A$, где $H(A) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i(A)$, f_i — преобразования подобия с коэффициентом $r_i = r$, $i = 1, \dots, N$).

е) То же, что в д), но $r_i \in (0, 1)$ произвольны.

7. Доказать почти-периодичность последовательности $x_n = \text{sign}(y_{n+1} - y_n)$, где $y_n = n\alpha \bmod 1$, $\alpha \in (0, 1)$ — иррационально.

8. Доказать почти-периодичность последовательностей, являющихся неподвижными точками подстановок:

а) Фибоначчи: $a \rightarrow ab, b \rightarrow a$;

б) Туэ – Морса: $a \rightarrow ab, b \rightarrow ba$

9. Построить квазикристалл на прямой, отвечающий подстановке Фибоначчи. (Указание. Можно либо использовать метод проектирования из полосы, подходящим образом наклоненной к осям, либо подобрать подходящие длины расстояний между точками квазикристалла, используя его самоподобие).

10. Оператор Хатчинсона H (см. задачу бд)) позволяет получить черно-белую бинарную картинку (рассматриваемую как подмножество плоскости) как неподвижную точку H . Придумать обобщение оператора Хатчинсона, позволяющее аналогичным образом получать полутоновые изображения.