

УПРАЖНЕНИЯ ПО ТЕМЕ "ФРАКТАЛЫ И МОЗАИКИ"

А. А. Лодкин

1. Доказать, что фрактал, получаемый из отрезка выкидыванием чисел, в 5-ричной записи которых отсутствуют цифры 1 и 3, гомеоморфен классическому канторову множеству  $C$ .
2. Доказать, что вполне несвязное подмножество интервала нигде не плотно в нем.
3. Доказать, что вполне несвязное компактное множество на прямой гомеоморфно  $C$ .
4. Доказать, что пространство целых  $p$ -адических чисел  $\mathbb{Z}_p$  ( $p$  — простое число) вполне несвязно.
5. Установить гомеоморфизм между  $\mathbb{Z}_2$  и  $C$ .
6. Пусть  $A \subset \mathbb{R}^n$  — компактное множество,  $N(\varepsilon)$  — минимальное число  $\varepsilon$ -шаров, покрывающих  $A$ ,  $\dim_M(A) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}$  — размерность Минковского множества  $A$ . Найти  $\dim_M(A)$ , если
  - а)  $A$  — гладкая кривая или поверхность;
  - б)  $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ;
  - в)  $A = \{\frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ;
  - г)  $A = C$ ;
  - д)  $A$  — самоподобное множество ( $H(A) = A$ , где  $H(A) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i(A)$ ,  $f_i$  — преобразования подобия с коэффициентом  $r_i = r$ ,  $i = 1, \dots, N$ ).
  - е) То же, что в д), но  $r_i \in (0, 1)$  произвольны.
7. Доказать почти-периодичность последовательности  $x_n = \text{sign}(y_{n+1} - y_n)$ , где  $y_n = n\alpha \bmod 1$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  — иррационально.
8. Доказать почти-периодичность последовательностей, являющихся неподвижными точками подстановок:
  - а) Фибоначчи:  $a \rightarrow ab, b \rightarrow a$ ;
  - б) Гуэ – Морса:  $a \rightarrow ab, b \rightarrow ba$
9. Построить квазикристалл на прямой, отвечающий подстановке Фибоначчи. (*Указание.* Можно либо использовать метод проектирования из полосы, подходящим образом наклоненной к осям, либо подобрать подходящие длины расстояний между точками квазикристалла, используя его самоподобие).
10. Оператор Хатчинсона  $H$  (см. задачу бд)) позволяет получить черно-белую бинарную картинку (рассматриваемую как подмножество плоскости) как неподвижную точку  $H$ . Придумать обобщение оператора Хатчинсона, позволяющее аналогичным образом получать полутоновые изображения.