Задачи и упражнения по теме «Максимальная функция и преобразование Гильберта»

Упражнения

Максимальная функция

Обозначения: $B_r(x)$ — шар радиуса r с центром в x, $|A|$ — лебегова мера множества A.

M1. а) Пусть μ — конечная мера на $\mathbb{R}^n$. Для $x \in \mathbb{R}^n$ положим

$$(M\mu)(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int\limits_B d\mu = \sup_{B \ni x} \frac{\mu(B)}{|B|},$$

где супремум берется по всем шарам B, содержащим точку x. Докажите, что

$$\big|\{x : (M\mu)(x) > t\}\big| \leqslant \frac{C}{t}\mu(\mathbb{R}^n).$$

б) Пусть μ — конечная знакопеременная мера (заряд) на $\mathbb{R}^n$, $|\mu|$ — ее полная вариация. Для $x \in \mathbb{R}^n$ положим

$$(M\mu)(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int\limits_B d|\mu| = \sup_{B \ni x} \frac{|\mu|(B)}{|B|},$$

где супремум берется по всем шарам B, содержащим точку x. Докажите, что

$$\big|\{x : (M\mu)(x) > t\}\big| \leqslant \frac{C}{t}|\mu|(\mathbb{R}^n).$$

M2. Неотрицательная конечная борелевская мера μ на топологическом пространстве X называется *регулярной*, если для любого борелевского множества e верно равенство

$$\mu e = \sup\{\mu a : a \subset e,\ a \text{ — компактно}\}.$$

Докажите, что всякая конечная борелевская мера на локально компактном метрическом пространстве, счетном в бесконечности, регулярна.

Указание. Примените теорему Лебега–Каратеодори к сужению меры μ на подходящую систему множеств.

M3. Пусть μ — конечная борелевская мера на $\mathbb{R}^n$. Докажите, что если мера сингулярна, то

$$\lim_{r \to 0} \mu B_r(x) = 0 \quad \text{для п. в. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Указание. Рассмотрите сначала случай, когда мера μ сосредоточена на компактном множестве нулевой лебеговой меры. Общий случай сводится к этому применением упражнения 2 и, а затем неравенства из упражнения 1 (в том же духе как доказывалась на лекции теорема о дифференцировании).

Преобразование Гильберта

Мы работали с функциями из $L^2(\mathbb{R})$. Аналогичная теория существует и для функций, суммируемых с квадратом на окружности.

H1. *Тригонометрическим полиномом* называется функция на окружности $\mathbb{T}$ вида $\sum\limits_{|k| \leqslant N} a_k \zeta^k$, $|\zeta| = 1$. Он называется *аналитическим*, если он есть сужение на окружность некоторого алгебраического полинома от одной комплексной переменной.

Докажите, что тригонометрический полиномом является аналитическим тогда и только тогда, когда $a_k = 0$ при $k < 0$.

H2. Пусть $H^2 = H^2(\mathbb{T})$ — замыкание множества аналитических полиномов в пространстве $L^2(\mathbb{T})$. Докажите, что

$$H^2 = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \widehat{f}(k) = 0 \text{ при } k < 0\}.$$

Тем самым ортогональный проектор на H^2 выглядит так:

$$\mathbb{P}_+ f(\zeta) = \sum_{n \geqslant 0} \widehat{f}(n)\zeta^n, \quad f \in L^2(\mathbb{T}).$$

H3. Докажите формулу для $\mathbb{P}_+$ в терминах интеграла типа Коши (предел берется в $L^2(\mathbb{T})$):

$$\mathbb{P}_+ f(\zeta) = \lim_{r\to 1-} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(\eta)}{\eta - r\zeta}\, d\eta = \lim_{r\to 1-} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})e^{i\theta}}{e^{i\theta} - r\zeta}\, d\theta = \lim_{r\to 1-} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{1 - r\zeta e^{-i\theta}}\, d\theta.$$

H4. Пусть u — вещественная функция из L^2 на окружности. Ищем такую вещественную функцию $v \in L^2(\mathbb{T})$, что $u + iv \in H^2$ и $\widehat{v}(0) = 0$ (последнее условие — нормировочное: прибавление к v вещественной константы не нарущает условия $u + iv \in H^2$).

Проверьте, что функция v однозначно определяется условием $\widehat{v}(n) = -i \operatorname{sign} n\, \widehat{u}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Тем самым оператор $u \mapsto v$ непрерывен в H^2 (и его норма не превосходит единицы). Этот оператор называется *оператором гармонического сопряжения* (аналог преобразования Гильберта) и обозначается $\mathcal{H}$. Его можно применять к произвольным (не обязательно вещественным) функциям из L^2: $u \mapsto v$, $\widehat{v}(n) = -i \operatorname{sign} n\, \widehat{u}(n)$.

H5. Выведите формулу ($\zeta = e^{it}$)

$$\mathcal{H}f(\zeta) = \lim_{r\to 1-} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{2r\sin(t-\theta)}{1 + r^2 - 2r\cos(t-\theta)} f(e^{i\theta})\, d\theta \qquad (\text{предел в } L^2(\mathbb{T})).$$

Заметим, что при $r \to 1$ ядро стремится к функции $\operatorname{ctg}\frac{t-\theta}{2}$, имеющей несуммируемую особенность при $\theta = t$.

H6. Проверьте (хотя бы для тригонометрических полиномов u), что

$$\mathcal{H}u(e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \text{ v.p.} \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{t-\theta}{2} u(e^{i\theta})\, d\theta.$$

H7. Докажите оценку

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{2r\sin(t-\theta)}{1 + r^2 - 2r\cos(t-\theta)} f(e^{i\theta})\, d\theta - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\substack{\theta\in[0,2\pi] \\ |t-\theta|\geqslant 1-r}} \operatorname{ctg}\frac{t-\theta}{2} f(e^{i\theta})\, d\theta \right| \leqslant CMf(e^{it}),$$

где M — максимальная функция, а C не зависит от t.

Выведите отсюда, что

$$\mathcal{H}f(e^{it}) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\substack{\theta\in[0,2\pi] \\ |t-\theta|\geqslant \varepsilon}} \operatorname{ctg}\frac{t-\theta}{2} f(e^{i\theta})\, d\theta \qquad (\text{предел в } L^2(\mathbb{T})).$$