Задачи и упражнения по теме «Неравенство Хинчина»

Обозначения: λ — мера Лебега на прямой; $\Delta_{n,j} = \left(\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)$; $r_n(x) = \operatorname{sign}\sin(2^n\pi x)$ — функция Радемахера; $R_n(x) = a_1r_1(x) + a_2r_2(x) + \ldots + a_nr_n(x)$.

Упражнения

1. Докажите верхнюю оценку в неравенстве Хинчина при $p \leqslant 2$ с константой $B_p = 1$.

2. Докажите (без использования информации про оптимальные константы), что не существует аналога неравенства Хинчина при $p = \infty$.

3. а) Докажите неравенство Хинчина для $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ хоть с какими-нибудь константами, зависящими от p.

б) Докажите, что если при $p > 2$ и некотором B_p неравенство

$$\|R_n\|_p \leqslant B_p\left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2\right)^{1/2}$$

справедливо для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то оно справедливо и для любых комплексных $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

При $0 < p < 2$ аналогичное утверждение верно для неравенства

$$\|R_n\|_p \geqslant A_p\left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2\right)^{1/2}.$$

4. а) По индукции докажите, что при $n \geqslant m$

$$\int_{\Delta_{m,j}} |R_m(x)|\,dx \leqslant \int_{\Delta_{m,j}} |R_n(x)|\,dx.$$

б) Выведите из пункта а), что

$$\lambda\bigl\{x \in (0,1) : \max\{|R_1(x)|, |R_2(x)|, \ldots, |R_n(x)|\} > t\bigr\} \leqslant \frac{A}{t}, \qquad (*)$$

где $A^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$.

5. Пусть ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n^2$ сходится.

а) Используя неравенство $(*)$, докажите, что

$$\lambda\bigl\{x \in (0,1) : \sup_{k\in\mathbb{N}} |R_{n+k}(x) - R_n(x)| > \varepsilon\bigr\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left(\sum_{j=n+1}^\infty a_j^2\right)^{1/2}.$$

б) Выведите из пункта а), что

$$\lambda\bigl\{x \in (0,1) : \varlimsup_{n\to\infty} R_n(x) - \varliminf_{n\to\infty} R_n(x) > \varepsilon\bigr\} = 0.$$

Осознайте, что таким образом установлена недостающая стрелочка 1) $\Rightarrow$ 5).

Задачи

1. а) Докажите тождество ($p > 0$, $n \in \mathbb{N}$ и $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$)

$$\Bigl\|\sum_{k=1}^n a_kr_k\Bigr\|_{p+2}^{p+2} = (p+1)\sum_{j=1}^n a_j^2 \int_0^1 \Bigl\|ta_jr_j + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n a_kr_k\Bigr\|_p^p dt.$$

б) Докажите, что наилучшие постоянные B_p^* в неравенстве Хинчина удовлетворяют неравенству $(B_{p+2}^*)^{p+2} \leqslant (p+1)(B_p^*)^p$.

в) Докажите, что $(B_{2m}^*)^{2m} = (2m-1)!!$.

2. Пусть $1 \leqslant p \leqslant 2$ и $T : \ell_n^\infty \to \ell_n^p$.

а) Докажите, что $\|T\|_{\ell_n^\infty \to \ell_n^p} \geqslant A_p n^{1/p}\sqrt[n]{|\det T|}$, где $\det T$ обозначает определитель матрицы оператора T в стандартном базисе.

б) Докажите, что $\|T\|_{\ell_n^\infty \to \ell_n^p}\|T^{-1}\|_{\ell_n^p \to \ell_n^\infty} \geqslant A_p\sqrt{n}$.