

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО ТЕМЕ «ТЕОРЕМА ПИКА И ЗАДАЧА ИНТЕРПОЛЯЦИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ»

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что псевдогиперболическая метрика в единичном круге является метрикой.
2. Докажите, что гиперболическая метрика в единичном круге является метрикой.
3. Сформулируйте и докажите аналог для верхней полуплоскости инвариантной формы леммы Шварца.
4. Пусть $R(z)$ — рациональная функция от комплексной переменной z . Предположим, что $|R(z)| = 1$ при всех z таких, что $|z| = 1$. Докажите, что R — отношение двух конечных произведений Бляшке.
5. Пусть f — непрерывная функция, заданная на замкнутом единичном круге. Предположим, что функция f аналитична в открытом единичном круге и $|f(z)| = 1$ при всех z таких, что $|z| = 1$. Докажите, что f — конечное произведение Бляшке.

ЗАДАЧИ

1. Пусть f — аналитическая функция в открытом единичном круге. Предположим, что $|f| < 1$ всюду. Докажите, что для любого натурального числа n найдётся произведение Бляшке B степени не выше n такое, что $f(z) - B(z) = O(z^n)$.
2. Пусть $\{z_n\}$ — последовательность различных точек открытого единичного круга. Докажите, что следующие два утверждения равносильны:
 - а) существует ненулевая ограниченная аналитическая функция f в открытом единичном круге такая, что $f(z_n) = 0$ при всех n ,
 - б) $\sum(1 - |z_n|) < \infty$.