О. Л. Виноградов

Неравенства для производных и разностей тригонометрических многочленов

Обозначения: H_n — множество тригонометрических многочленов степени не выше n, P — полунорма, заданная на H_n, инвариантная относительно сдвига,

$$\delta_h f(x) = f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right), \quad \Box_h f(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(x+\frac{h}{2}\right) + f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right),$$

δ_h^r — r-я степень оператора δ_h.

Упражнения

1. Доказать тождества для многочленов Бернулли:

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x), \qquad B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x),$$
$$B_{2m+1}(1/2) = 0 \quad (m \in \mathbb{Z}_+), \qquad B_{2m+1}(0) = B_{2m+1}(1) = 0 \quad (m \in \mathbb{N}).$$

2. Вывести разложения функций $\frac{x}{\sin x}$, $\frac{1}{\cos x}$, $\frac{\sin \alpha x}{\sin x}$, $\frac{\cos \alpha x}{\cos x}$, $\frac{\sin \alpha x}{\cos x}$ в степенные ряды.

3. Доказать положительность коэффициентов разложений $\frac{1}{\cos x}$, $\frac{\cos \alpha x}{\cos x}$ и $\frac{\sin \alpha x}{\cos x}$ при $\alpha \in (0, 1]$.

4. Пусть $r, n \in \mathbb{N}$, $f \in H_n$, $0 < h \leqslant \frac{\pi}{n}$. Доказать неравенство

$$P(\delta_h^r(f)) \leqslant \left(2\sin\frac{nh}{2}\right)^r P(f).$$

5. Пусть $r, n \in \mathbb{N}$, $f \in H_n$, $0 < h < \frac{\pi}{n}$. Доказать неравенства

$$P(f^{(r)}) \leqslant \frac{1}{\cos\frac{nh}{2}}\left(\frac{n}{2\sin\frac{nh}{2}}\right)^r P\left(\Box_h \delta_h^r(f)\right),$$

$$P\left(f^{(r)} - \frac{1}{h^r}\Box_h \delta_h^r(f)\right) \leqslant \frac{n^r - \cos\frac{nh}{2}\left(\frac{2}{h}\sin\frac{nh}{2}\right)^r}{\cos\frac{nh}{2}\left(2\sin\frac{nh}{2}\right)^{r+2}} P\left(\Box_h \delta_h^{r+2}(f)\right).$$

Проверить, что второе усиливает первое.

6. Пусть $r, n \in \mathbb{N}$, $f \in H_n$, $0 < u < h < \frac{2\pi}{n}$. Доказать неравенства

$$\frac{P(\delta_u^r(f))}{\sin^r\frac{nu}{2}} \leqslant \frac{P(\delta_h^r(f))}{\sin^r\frac{nh}{2}},$$

$$P\left(\frac{1}{u^r}\delta_u^r(f) - \frac{1}{h^r}\delta_h^r(f)\right) \leqslant \frac{\left(\frac{2}{u}\sin\frac{nu}{2}\right)^r - \left(\frac{2}{h}\sin\frac{nh}{2}\right)^r}{\left(2\sin\frac{nh}{2}\right)^{r+2}} P\left(\delta_h^{r+2}(f)\right).$$

Проверить, что второе усиливает первое.

Задачи для исследования

1. При каких α_1, α_2 функция

$$f(x) = \frac{\cos\alpha_1 x \cos\alpha_2 x}{\cos x}$$

абсолютно монотонна? Обобщить результат на произведение нескольких сомножителей.

Тот же вопрос (возможно, с заменой абсолютной монотонности на квазиабсолютную монотонность) имеет смысл для других произведений синусов и косинусов как в числителе, так и в знаменателе. Каждое из таких утверждений позволяет по известной схеме получить новую серию неравенств для тригонометрических многочленов.

2. Нет ли возможности как-то уложить в общую схему формулу Тейлора? Возможно, специальный тригонометрический вариант формулы Тейлора?

3. Распространить схему получения неравенств на периодические сплайны. Необходимые сведения о сплайнах и известные неравенства можно найти в книге: Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. Киев, 1992. В ней не только доказываются сами неравенства типа Бернштейна и Рисса для сплайнов, но и делаются попытки усилить их в направлении, похожем на то, о котором рассказывалось на лекциях. Известные доказательства основаны на других идеях.

Представляется, что все эти неравенства должны вытекать из тождеств интерполяционного типа. Открытие таких тождеств, коэффициенты в которых обладали бы желаемой знакорегулярностью, привело бы к ясности в этом вопросе. Неравенства не получены прямым путем даже в пространстве L_2, где, казалось бы, задача гораздо проще, чем в общем случае.