Задачи и упражнения по теме «Теорема Римана о конформном отображении»

Во всех упражнениях Ω — область (т. е. открытое связное подмножество $\mathbb{C}$), $H(\Omega)$ — класс функций, голоморфных в Ω.

Обозначения: $\|f\|$ означает $\sup_{z\in\Omega}|f(z)|$,
$\operatorname{dist}(z_0, A)$ — расстояние от точки z до множества A, т. е. $\min_{z\in A}|z_0 - z|$,
$B_r(a)$ — круг радиуса r с центром в точке a.

Упражнения

1. Пусть $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n$. Выведите из теоремы Руше, что многочлен f имеет n корней в круге $|z| < R$ радиуса $R = 1 + |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$.

Замечание. В частности, из этого следует основная теорема алгебры.

2. Пусть $\mathcal{M} \subset H(\Omega)$ — бесконечное семейство функций. Для того чтобы из любой последовательности функций из $\mathcal{M}$, можно было выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на любом компакте из Ω к голоморфной функции, необходимо чтобы семейство $\mathcal{M}$ было равномерно ограничено в Ω.

Замечание. Достаточность этого условия доказывалась на лекции.

3. Если последовательность функций f_n, голоморфных в области Ω, равномерно ограничена в Ω и сходится на множестве точек $z_k \in \Omega$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$, имеющем предельную точку внутри Ω, то она сходится равномерно на любом компакте, содержащемся в Ω.

4. Пусть $\Omega \neq \mathbb{C}$ — односвязная область, $a \in \Omega$. Докажите, что существует единственная функция $f \in H(\Omega)$, такая что $f(a) = 0$, $f'(a) = 1$ и f однолистно отображает область Ω на круг с центром в нуле.

Определение. Радиус этого круга называется конформным радиусом области Ω в точке a. Мы его обозначим $r(\Omega, a)$.

5. Пусть $\Omega \neq \mathbb{C}$ — односвязная область, содержащая ноль. Пусть

$$\mathcal{N} = \{f \in H(\Omega) : f(0) = 0 \text{ и } f'(0) = 1\}.$$

Докажите, что минимум $\min\limits_{f\in\mathcal{N}}\|f\|$ достигается на функции, однолистно отображающей область Ω на круг $|z| < R$, причем этот минимум равен $r(\Omega, 0)$.

6. Пусть $\Omega_1 \subset \Omega_2 \neq \mathbb{C}$ — односвязные области, $a \in \Omega_1$. Докажите, что
а) $r(\Omega_1, a) \leqslant r(\Omega_2, a)$;
б) $r(\Omega_1, a) \geqslant \operatorname{dist}(a, \partial\Omega_1)$;
в) Если $\Omega_1 \subset B_R(a)$, то $r(\Omega_1, a) \leqslant R$.