

1. Сколькими способами можно разрезать ожерелье, состоящее из 30 различных бусин, на 8 частей (резать можно только между бусинами)?

2. а) Сколькими способами можно расставить на первой горизонтали шахматной доски комплект белых фигур (король, ферзь, два слона, два коня, две ладьи)?

б) Тот же вопрос, если слоны должны стоять на клетках разного цвета.

3. Сколькими способами можно разбить 100 человек на пары?

4. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове “математика”?

5. Найдите сумму $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n$.

6. Сколько несократимых дробей имеется среди n^2 дробей

$$1/1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n$$

$$2/1, 2/2, 2/3, \dots, 2/n$$

.....

$$n/1, n/2, n/3, \dots, n/n?$$

7. Сколькими способами можно выложить в ряд 100 синих и 12 красных шаров так, чтобы красные шары не лежали рядом?

8. Сколькими способами можно разменять три рубля на монеты в 1, 5, 10 и 50 копеек?

9. Верно ли, что записи $e^{o(n)}$ и $o(e^n)$ равносильны?

10. Какая функция растет быстрее n^{n^n} или $(n!)^{2^n}$?

11. Найдите сумму $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2$, где F_n — n -е число Фибоначчи.

12. Найдите производящие функции для последовательностей:

а) 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...;

б) $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots$;

в) $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$.

13. Докажите формулу Ньютона–Лейбница

$$(A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t).$$

14. Докажите равенство $\exp(\ln((1-s)^{-1})) = (1-s)^{-1}$.

15. Найдите производящие функции и явное выражение для элементов последовательностей, заданных рекуррентными формулами:

а) $a_0 = 2, a_1 = 3, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$;

б) $a_0 = 3, a_1 = 5, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$.

16. Найдите количество замкнутых несамопересекающихся и не самокасающихся путей длины $2n + 2$, идущих по линиям клетчатой бумаги.

17. Сколькими способами можно разложить 120 одинаковых яблок по пяти полкам холодильника так, так чтобы ни одна полка не осталась пустой?

18. Пусть множество M состоит из m элементов, а множество N из n элементов.

а) Сколько существует отображений из множества M в множество N , которые являются сюръекциями?

б) Сколько существует отображений из множества M в множество N , принимающих ровно k различных значений?

19. Докажите, что

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum \binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k},$$

где суммирование ведется по всем наборам положительных натуральных чисел r_1, r_2, \dots, r_k таким, что $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$.

20. Докажите, что знаки чисел Бернулли с нечетными номерами чередуются.