Обязательное домашнее задание по комбинаторике и теории графов

17.11.2011

1 (*1 балл*). Найдите асимптотику для C_{7n}^n.

2 (*1 балл*). Найдите константу γ в записи $C_{5n}^n = (\gamma + o(1))^n$.

3. Найдите формулу n-го члена для последовательностей, заданных условиями

а) (*1 балл*) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$;

б) (*1 балл*) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n + n$.

4 (*1 балл*). Найдите формулу n-го члена для последовательности, заданной условием $a_0 = 0$, $a_1 = 3$, $a_2 = 11$, $a_{n+3} = 3a_{n+2} + 2a_{n+1} - 6a_n$.

5. Вычислите суммы

а) (*1 балл*) $C_n^1 + 2^2C_n^2 + 3^2C_n^3 + \dots + n^2C_n^n$;

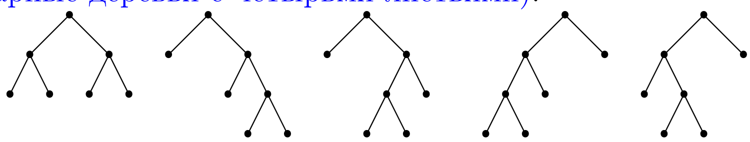
б) (*1 балл*) $\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \dots + n\sin nx$.

6 (*2 балла*). Даны натуральные числа ℓ и m. Обозначим через a_n число неупорядоченных решений уравнения $x_1+x_2+x_3+\dots+x_p = n$, если все неизвестные удовлетворяют неравенству $0 \leqslant \ell \leqslant x_k \leqslant m$. Найдите производящую функцию для последовательности $\{a_n\}$.

6' (*3 балла*). Докажите, что число разбиений n, в которых могут повторяться только нечетные части, равно числу разбиений n, в которых нет части, встречающейся более чем три раза.

7 (*2 балла*). Нарисуем треугольник Паскаля и выровняем его по левому краю. Чему равна сумма чисел на n-й восходящей диагонали?

8 (*2 балла*). Докажите, что число плоских бинарных деревьев с $n+1$ листьями (висячими вершинами) равно c_n (n-ое число Каталана). Бинарным называется дерево с выделенной вершиной (корнем) степени 2, все остальные вершины которого имеют степень 1 или 3 (на рисунке все плоские бинарные деревья с четырьмя листьями).



9 (*2 балла*). Найти наибольшее возможное количество ребер в графе с n вершинами, если известно, что среди произвольных трех его вершин есть две, не соединенные ребром.

10 (*3 балла*). Для произвольных натуральных чисел m и n обозначим через $R(m,n)$ такое наименьшее число k, что в произвольном графе с k вершинами найдется либо m попарно соединенных ребрами вершин, либо n попарно несоединенных. Докажите, что

$$R(m,n) \leqslant R(m-1,n) + R(m,n-1).$$

11 (*1 балл*). В связном графе все вершины имеют степень 100. Докажите, что после удаления любого из его ребер он остается связным.

12 (*2 балла*). Ребро графа называется *мостом*, если после его удаления количество компонент связности графа увеличивается. Докажите, что граф является лесом если и только если любое его ребро — мост.

13. а) (*1 балл*) Докажите, что в графе с более чем одной вершиной есть две вершины одинаковой степени.

б) (*3 балла*) Все n Петиных одноклассников имеют по различному числу друзей в этом классе. Сколько из них дружат с Петей?

14 (*2 балла*). В графе для любых двух вершин A и B, имеющих одинаковую степень, нет вершины, смежной и с A, и с B. Докажите, что в графе есть висчая вершина.

15 (*1 балл*). Докажите, что граф K_5 не планарен.

16 (*2 балла*). Даны натуральные числа n и d. Докажите, что если любые k ($1 \leqslant k \leqslant n$) юношей знакомы в совокупности не менее чем с $k-d$ девушками, то $n-d$ юношей могут выбрать себе невест из числа знакомых.

17 (*2 балла*). Квадратный лист бумаги разбит на сто многоугольников одинаковой площади с одной стороны и на сто других той же площади с обратной стороны. Докажите, что этот квадрат можно проткнуть ста иголками так, что каждый из двухсот многоугольников будет проткнут по разу.