Упражнения на интегралы Хенстока–Курцвейля, МакШейна и Перрона

1. Функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ такая, что $(\mathcal{H}) \int\limits_a^b |f(x)|\,dx = 0$. Пользуясь определением интеграла Хенстока докажите, что f интегрируема по Хенстоку и $(\mathcal{H}) \int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$.

2. Функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ монотонна. Докажите, что f интегрируема по МакШейну.

3. Приведите пример функции на $[-1,1]$, не интегрируемой по Хенстоку, у которой существует интеграл в смысле главного значения.

4. Докажите, что функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по МакШейну тогда и только тогда, когда функции $\chi_E f$ интегрируемы по Хенстоку для любого измеримого $E \subset [a,b]$.

5. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Докажите, что f интегрируема по Хенстоку на $\mathbb{R}$ если и только, если существует такое число $A \in \mathbb{R}$, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $a < b$ и такая калибровочная функция $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$, что $|S(f,\tau) - A| < \varepsilon$ для любого δ-тонкого разбиения Хенстока τ.

6. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Докажите, что f интегрируема по Хенстоку на $\mathbb{R}$ если и только, если существует такое число $A \in \mathbb{R}$, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют такое $r > 0$ и такая калибровочная функция $\delta : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, что если $a \leqslant -r$ и $b \geqslant r$, то $|S(f,\tau) - A| < \varepsilon$ для любого τ — δ-тонкого разбиения Хенстока отрезка $[a,b]$.

7. Функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по МакШейну. Положим

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) & |f(x)| \leqslant k \\ k & f(x) > k \\ -k & f(x) < k. \end{cases}$$

Докажите, что $f_k(x)$ интегрируема по МакШейну и $\lim\limits_{k\to\infty} (\mathcal{M}) \int\limits_a^b f_k(x)\,dx = (\mathcal{M}) \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Верно ли аналогичное утверждение для интеграла Хенстока?

8. Пусть $f(x) = |x|$. Найдите $\overline{D} f(0)$ и $\underline{D} f(0)$.

9. Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ и $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ — калибровочная функция. Положим $m_\delta(a) = M_\delta(a) = 0$ и

$$\begin{aligned} M_\delta(x) &= \sup\{S(f,\tau) \,:\, \tau \text{ — } \delta\text{-тонкое разбиение Хенстока отрезка } [a,x]\}, \\ m_\delta(x) &= \inf\{S(f,\tau) \,:\, \tau \text{ — } \delta\text{-тонкое разбиение Хенстока отрезка } [a,x]\} \end{aligned}$$

Докажите, что m_δ и M_δ — миноранта и мажоранта функции f.

10. Пусть $\mathcal{HK}([a,b])$ — пространство функций интегрируемых по Хенстоку. Положим

$$\|f\| = \sup\left\{ \left| (\mathcal{H}) \int\limits_a^x f(t)\,dt \right| : a \leqslant x \leqslant b \right\}$$

(норма Алексевича). Докажите, что $\|\cdot\|$ норма, если функции различающиеся на множестве меры ноль считаются эквивалентными. Докажите, что пространство $\mathcal{HK}([a,b])$ с этой нормой — неполное сепарабельное пространство.