

Дополнительные главы теории меры.
2010 год, спец. курс для студентов 3 курса.

ВНЕШНИЕ МЕРЫ

1. Предмера. Сужение предмеры на измеримые множества.
2. Внешняя мера. Стандартное продолжение меры.
3. Техническая теорема и следствие о структуре множеств, измеримых относительно стандартного продолжения меры.
4. Теоремы о монотонном классе, единственности и минимальности стандартного продолжения меры.
5. Метрическая внешняя мера. Свойства.
6. Борелевски регулярные внешние меры.
7. Построение метрических внешних мер. Совпадение внешней меры с метрической внешней мерой.
8. Произведение мер и мера Лебега.
9. Мера Хаусдорфа. Свойства и мера куба.
10. Вычисление нормировочной константы меры Хаусдорфа.
11. Размерность Хаусдорфа. Размерность Хаусдорфа графика функции.
12. Связь длины и одномерной меры Хаусдорфа. Формулы площади и коплощади (без доказательства).

ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ И СРЕДНИЕ

13. Лемма Холла. Лемма о минимальных ε -сетях. Произведение метрических компактов.
14. Существование меры Хаара.
15. Метризация группы изометрий.
16. Единственность меры Хаара. Носитель меры Хаара.
17. Мера Хаара на Грассмановом многообразии. Следствие об интегрировании функций на сфере.
18. Инвариантные средние. Псевдоразрешимые семейства. Примеры.
19. Теорема Маркова–Какутани.
20. Свойства инвариантных средних.
21. Аменабельные группы. Теорема фон Неймана.
22. Конечно-аддитивные функции подмножеств аменабельной группы. Теоремы Банаха.
23. Теорема фон Неймана о неаменабельности свободной группы.
24. Группы $SO(n)$. Аменабельность дискретной и топологической групп.
25. Парадоксальные множества. Теорема Хаусдорфа.
26. Инвариантные меры на компакте. Теоремы Крылова–Боголюбова.
27. Банахов предел.

МАКСИМАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

28. Максимальная функция. Свойства и примеры.
29. Теорема Безиковича о покрытии.
30. Функция распределения.
31. Оценка слабого типа 1–1 для максимального оператора. Следствия.
32. Теорема о максимальном операторе в пространстве $L^p(\mathbb{R}^N)$ при $p > 1$. Следствие.
33. Дифференцируемость интеграла от локально суммируемой функции.
34. Точки плотности. Теорема о точках Лебега локально суммируемой функции. Регулярные семейства множеств.
35. Теорема Лебега о разложении меры.
36. Теорема о дифференцировании регулярной меры. Производная монотонной функции.