

ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ. Вечернее отделение, семестр 3, осень 2007.

1. Сходимость несобственных интегралов: определение, примеры, простейшие свойства.
2. Критерий Коши, абсолютная сходимость.
3. Теорема сравнения, следствия; формула Ньютона–Лейбница и формула интегрирования по частям.
4. Признаки Абеля и Дирихле (доказательства для общего случая и доказательство для случая дифференцируемой функции $g(x)$).
5. Интегралы $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p}$ и $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^p}$.
6. Длина кривой: определение, простейшие свойства, оценка через максимум и минимум производных.
7. Интегральная формула для длины кривой, частные случаи формулы.
8. Площадь фигуры: определение, простейшие свойства.
9. Квадрируемые области. Интегральные формулы площади для подграфика функции; для фигур, заданных в полярных координатах и заданных параметрически.
10. Объем тела, формула для объема тела вращения. Площадь поверхности: пример Шварца.
11. Функции ограниченной вариации: определение, примеры, свойства (ограниченность, линейность, оценка вариации произведения функций).
12. Свойства функций ограниченной вариации (оценка вариации отношения функций, аддитивность, “наследуемость”). Связь функций ограниченной вариации и монотонных функций.
13. Интеграл Стильтеса: определение, простейшие свойства.
14. Интеграл Стильтеса: теорема существования, связь с интегралом Римана.
15. Сходимость рядов: определение, примеры, простейшие свойства.
16. Теоремы сравнения, примеры их применения.
17. Признаки Коши и Даламбера. Связь между признаками.
18. Интегральный признак, примеры его применения.
19. Знакопеременные ряды: абсолютная сходимость, критерий Коши, признак Лейбница. Вычисление суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
20. Преобразование Абеля. Признаки Абеля и Дирихле. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$.
21. Законы ассоциативности для числовых рядов.
22. Коммутативность для числовых рядов. Теорема Римана (формулировка).
23. Произведение рядов: определение, теорема для абсолютно сходящихся рядов.
24. Функциональные ряды. Поточечная и равномерная сходимости.
25. Критерий Коши. Признак Вейерштрасса.
26. Признаки Абеля и Дирихле. Пример применения.
27. Теорема о почленном переходе к пределу. Следствие.
28. Теорема о почленном интегрировании ряда. Пример, показывающий, что условие равномерности существенно.
29. Теорема о почленном дифференцировании ряда.
30. Степенные ряды: радиус сходимости, формула Коши–Адамара.
31. Степенные ряды: свойства.
32. Теорема Абеля.
33. Ряды Тейлора: теорема существования, ряды Тейлора для e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ и $\ln(1+x)$.