Программа экзамена по математическому анализу.
Вечернее отделение, семестр 5, осень 2008.

1. Системы множеств: определения и примеры.

2. Свойства систем множеств. Теорема о существовании минимального кольца, алгебры и σ-алгебры содержащей данное семейство множеств.

3. Теорема о структуре кольца, содержащего полукольцо.

4. Аддитивные функции множеств.

4. Мера: определение и примеры. Теорема о счетной полуаддитивности.

5. Две теоремы о том, когда конечно аддитивная функция является мерой.

6. Субмеры. Мера как сужение субмеры.

7. Внешняя мера.

8. Мера Лебега. Лемма о дизъюнктных ячейках.

9. Свойства меры Лебега 1–7.

10. Свойства меры Лебега 8–11. Пример несчетного множества, имеющего нулевую меру.

11. Инвариантность меры Лебега. Пример неизмеримого множества.

12. Измеримые функции: примеры, эквивалентные определения.

13. Измеримость функций $|f|$, f^2, $f_\pm$.

14. Измеримость функций $f \pm g$, fg, f/g.

15. Верхний и нижний пределы последовательности: равносильность определений. Измеримость $\inf f_n$, $\sup f_n$, $\underline{\lim}\, f_n$, $\overline{\lim}\, f_n$.

16. Измеримость функций $\lim f_n$, $\varphi \circ f$, f^p.

17. Различные виды сходимости последовательности функций.

18. Единственность (с точностью до множества меры 0) предельных функций.

19. Теорема Егорова, пример и следствие. Теоремы Лузина и Фреше (без доказательства).

20. Теорема Рисса. Следствия.

21. Простые функции. Приближение неотрицательной измеримой функции простыми.

22. Простые функции. Свойства. Приближение измеримой функции простыми.

23. Определение интеграла Лебега.

24. Элементарные свойства интеграла от неотрицательной функции (до теоремы Беппо Леви).

25. Теорема Беппо Леви.

26. Линейность интеграла.

27. Аддитивность интеграла, положительность интеграла, неравенство Чебышёва.

28. Свойства интеграла, связанные с неравенствами 1–4.

29. Свойства интеграла, связанные с неравенствами 5–7 и их п. в. аналоги.

30. Линейность интеграла, суммируемость функции на объединении множеств.

31. Аддитивность интеграла (по множеству и по мере).

32. Неравенства Юнга и Гёльдера.

33. Неравенство Минковского. Варианты неравенств произвольных измеримых функций.

34. Лемма Фату. Усиленный вариант теоремы Беппо Леви.

35. Теорема Лебега о предельном переходе.

36. Теорема о почленном интегрирование рядов. Счетная аддитивность интеграла.

37. Следствия счетной аддитивности интеграла. Абсолютная непрерывность интеграла. Следствия.

38. Плотность меры. Единственность плотности.

39. Произведение полуколец. σ-конечные меры. Примеры.

40. Произведение мер: мера на полукольце.

41. Теорема о свойстве множества с конечной внешней мерой. Следствие.

42. Монотонный класс. Теорема о единственности продолжения меры.

43. Принцип Кавальери. Шаг 1.

44. Принцип Кавальери. Шаги 2 и 3.

45. Принцип Кавальери. Шаг 4.

46. Теорема о мере подграфика.

47. Теорема Тонелли.

48. Теорема Фубини. Следствие.

49. Теорема о замене переменной в интеграле Лебега (без доказательства). Связь интегралов Римана и Лебега.

50. Дифференциальные формы. Определение, примеры. Разложение форм степени 1 по базису.

51. Интеграл от дифференциальной формы степени 1. Замена параметра. Первообразная.

52. Криволинейный интеграл I рода.

При изложении теории меры за основу были взяты первые две главы книги *Anver Friedman* “Foundations of morden analysis”.